代数B. 解答　　担当 白井生

NO.

DATE　　.　　.

$\boxed{1}$ (1), (2) 講義でやったので、省略

(3) まず $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$ を考える。

$\sqrt{3}$ の最小多項式は T^2-3 なので、これは2次拡大で、

基底は $1, \sqrt{3}$

次に、$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$ を考えると、

$\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ （もし $\sqrt{5} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ なら $\sqrt{5} = a_0 + a_1\sqrt{3}$ $(a_0, a_1 \in \mathbb{Q})$ の形

$5 = (a_0 + a_1\sqrt{3})^2$

$= b_0 + b_1\sqrt{3}$ $(b_0, b_1 \in \mathbb{Q})$

なので $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$ となってしまう）

なので、拡大次数は2次以上。

また $\sqrt{5}$ は $T^2-5=0$ の解なので、最小多項式は2次以下

よって $\sqrt{5}$ の（$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ における）最小多項式は T^2-5 なので

これも2次拡大で、基底は $1, \sqrt{5}$.

以上から $[\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$

$= 4$

で基底は $1, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{15}$

(4). $\alpha = \sqrt{1+\sqrt{3}}$ の最小多項式 $F_\alpha(T)$ を考える。

$(\alpha^2-1)^2 = 3$ より、$\alpha^4 - 2\alpha - 2 = 0$

よって $F_\alpha(T) \mid T^4-2T-2$ で、アイゼンシュタインの判定法より、T^4-2T-2 は既約

よって $F_\alpha(T) = T^4-2T-2$

よって $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 4$ で、基底は $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$

$= 1, \sqrt{1+\sqrt{3}}, 1+\sqrt{3}, (1+\sqrt{3})\cdot\sqrt{1+\sqrt{3}}$

LOOSE LEAF L1205 8mm×27lines maruman

NO.

DATE つづき

□1 (5) ($\because$ $\sqrt{15} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10})$. なので $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10})$)

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) = \mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10})$

まず $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}) : \mathbb{Q}]$ を考える。

$\sqrt{6}$ の最小多項式は T^2-6 なので拡大次数は2で、

基底は $1, \sqrt{6}$

次に $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})]$ を考える。

$\sqrt{10} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ (もし $\sqrt{10} \in \mathbb{Q}(\sqrt{6})$ なら $\sqrt{10} = a_0 + a_1\sqrt{6}$ $(a_0, a_1 \in \mathbb{Q})$ の形で

$10 = (a_0 + a_1\sqrt{6})^2$

$= b_0 + b_1\sqrt{6}$ $(b_0, b_1 \in \mathbb{Q})$

なので $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$ となってしまう)

なので拡大次数は2以上

また $\sqrt{10}$ は T^2-10 の解なので拡大次数は2以下

よって $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}) : \mathbb{Q}(\sqrt{6})] = 2$ で基底は $1, \sqrt{10}$

以上から $[\mathbb{Q}(\sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}) : \mathbb{Q}] = 4$ で

基底は $1, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}$

□2 (1) もし可約なら1次式で割れる。また $\mathbb{Z}$上可約 $\Longleftrightarrow$ $\mathbb{Q}$上可約

なので $\alpha \in \mathbb{Z}$ を解とすると $\alpha^3 - 3\alpha^2 + 2\alpha - 4 = 0$

$\alpha(\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 4$ よって $\alpha \mid 4$

$f(T) = T^3 - 3T^2 + 2T - 4$ とおくと $f(1) = -4$, $f(2) = -4$, $f(4) = 20$

$f(-1) = -10$, $f(-2) = -28$, $f(-4) < 0$

なので4の約数は解になり得ない。これは矛盾

よって $f(T)$ は既約