代数学　2枚目

NO.

DATE

[2] (2) $T^4 - T^3 - 3T^2 - 4T - 2 = (T^2 - 2T - 2)(T^2 + T + 1)$ なので可約

(3) 法2で還元して考える。

$\bar{f}(T) = T^4 + T + 1 \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$ について

$\bar{f}(0) = \bar{f}(1) = 1 \neq 0$ より、一次式で割れない

$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[T]$ の2次の既約多項式は $T^2+T+1$ のみ ← (これ以外は、0か1を解にもつ)

で、$(T^2+T+1)^2 = T^4 + T^2 + 1 \neq \bar{f}(T)$

なので $\bar{f}(T)$ は2次式でも割りきれない

よって $\bar{f}(T)$ は既約 なので $f(T) = T^4 + 2T^3 + T + 1$ も $\mathbb{Q}$ 上既約

(4) アイゼンシュタイン判定法より既約

[3] $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

一方、$\mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \ni \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ なので、

$$\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$$

$$\sqrt{2} = (\sqrt{3}+\sqrt{2}) - \sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

[4] (1) $\alpha = 1+2\sqrt{2}$ であると、$\left(\dfrac{\alpha-1}{2}\right)^2 = 2$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 8$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 7 = 0$$

∴ $T^2 - 2T - 7$ が最小多項式 ($T - (1+2\sqrt{2}) \notin \mathbb{Q}[T]$ なので最小多項式は2次以上)

LOOSE LEAF L1205 8mm×27lines maruman

$\boxed{4}$ (2) $\alpha=2+\sqrt[3]{3}$ とすると、

$$(\alpha-2)^3=3$$
$$\alpha^3-3\cdot2\cdot\alpha^2+3\cdot2^2\alpha-2^3=3$$
$$\alpha^3-6\alpha^2+12\alpha-11=0$$

$f(T)=T^3-6T^2+12T-11$ が可約なら、一次式で割れるので
11の約数を解にもつ?

$f(1)=-4$、 $f(11)=11^2(11-6)+11\cdot11>0$

$f(-1)<0$、 $f(-11)<0$ なので、これは矛盾

よって $f(T)$ は既約なので、最小多項式は $T^3-6T^2+12T-11$

(3) $\alpha=\dfrac{1}{\sqrt2+i}$ とおくと、 $\alpha=\dfrac{\sqrt2-i}{2+1}=\dfrac{1}{3}(\sqrt2-i)$ なので、

$$3\alpha+\frac{1}{\alpha}=2\sqrt2$$

$$\left(3\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=8$$

$$9\alpha^2+6+\frac{1}{\alpha^2}=8$$
$$9\alpha^4+6\alpha^2+1=8\alpha^2$$
$$9\alpha^4-2\alpha^2+1=0$$

もし $9T^4-2T^2+1$ が2次で割れるなら、最小多項式は2次以下だが、

$T-\alpha$、 $(T-\alpha)(T-\bar\alpha)=T^2-\frac{2}{3}\sqrt2T+\frac{1}{3}$

は $\mathbb{Q}$ 係数でないので、矛盾

もし1次で割れるなら、4次と0次の係数を見ると、

$aT+b$ $(a\mid9,\ b=\pm1)$ の形のみ

$f(T)=9T^4-2T^2+1$ とおくと、 $f(1)=f(-1)=8$

$f\left(\frac{1}{3}\right)=f\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$

$f\left(\frac{1}{9}\right)=f\left(-\frac{1}{9}\right)\neq0$

なので、1次でも割れない。よって $f$ は既約なので、最小多項式は $9T^4-2T^2+1$!