代数B、3枚目

5 (1) $\sqrt[9]{9} = (\sqrt[9]{3})^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$ より、$\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$

一方、$\sqrt[9]{3} = 3^{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}\cdot 3^{\frac{10}{9}} = \frac{1}{3}\cdot(3^{\frac{2}{9}})^5 = \frac{1}{3}\cdot(\sqrt[9]{9})^5 \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$

よって $\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$

(2) (1)より、$\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) = \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$

$[\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}):\mathbb{Q}]$ を考える。 $\sqrt[9]{3}$ は $T^9-3=0$ の解で、

アイゼンシュタイン判定法より、T^9-3 は既約なので

T^9-3 は $\sqrt[9]{3}$ の最小多項式

よって拡大次数は9 ・・・(☆)

もし $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$ なら $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$

$[\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}] = 2$ なので、$[\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}):\mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{3})]\cdot[\mathbb{Q}(\sqrt{3}):\mathbb{Q}]$

と(☆)より $2 \mid 9$ であるが、これは矛盾

よって $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$

6 $\alpha \in k(\alpha)$ で、$k(\alpha)$ は体より $\alpha^2 \in k(\alpha)$ よって $k(\alpha^2) \subset k(\alpha)$

一方、$[L:k]=3$ より、$1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$ は L 上で一次従属

よって $\exists a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{Q}$ s.t. $a_3\alpha^3 + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$ ・・・①

両辺αをかけて $a_3\alpha^4 + a_2\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_0\alpha = 0$ ・・・②

①・a_2 より、$a_2a_3\alpha^3 + a_2^2\alpha^2 + a_1a_2\alpha + a_0a_2 = 0$

②・a_3 より、$a_3^2\alpha^4 + a_2a_3\alpha^3 + a_1a_3\alpha^2 + a_0a_3\alpha = 0$

辺々引いて、係数をまとめると、

$b_4\alpha^4 + b_2\alpha^2 + b_1\alpha + b_0 = 0$ $(b_0 \sim b_4 \in \mathbb{Q})$

よって $\alpha = -b_1^{-1}(b_4\alpha^4 + b_2\alpha^2 + b_0) \in k(\alpha^2)$

なんで、$k(\alpha) \subset k(\alpha^2)$

以上から、$k(\alpha) = k(\alpha^2)$

NO.

DATE