NO.

DATE

6 $L=k(\alpha)$. $[L:k]=3$ より $L=\{a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2 : a_0\sim a_2\in k\}$ の形

$[L:k]<\infty$ より、α は k 上代数的 ... より ある方程式が存在し

$$\alpha^3+a_2\alpha^2+a_1\alpha+a_0=0 \quad (a_0\sim a_2\in k)$$

$$\alpha^4+a_2\alpha^3+a_1\alpha^2+a_0\alpha=0$$

$$-)\quad a_2\alpha^3+a_2^2\alpha^2+a_1a_2\alpha+a_0a_2=0$$

$$\alpha^4 + b_2\alpha^2+b_1\alpha+b_0=0$$

よって $\alpha=-b_1^{-1}(\alpha^4+b_2\alpha^2+b_0)\in k(\alpha^2)$

$\therefore\ k(\alpha)=k(\alpha^2)$

$\alpha^2\in k(\alpha)$ より $k(\alpha^2)\subset k(\alpha)$

6 （訂正）

$\alpha^2\in k(\alpha)$ より $k(\alpha^2)\subset k(\alpha)$

$$[k(\alpha):k]=[k(\alpha):k(\alpha^2)]\cdot[k(\alpha^2):k]=3$$

より、どちらかが1

もし $k(\alpha^2)\neq k(\alpha)$ なら $k(\alpha^2)\subsetneq k(\alpha)$ なので $[k(\alpha^2):k]=1$

よって $k(\alpha^2)=k$ より $\alpha^2\in k$.

よって α は $T^2-\alpha^2\in k[T]$ の解なので 最小多項式 $F_\alpha(T)$ は2次以下

よって $[k(\alpha):k]\leq 2$ だが、これは矛盾

以上から $k(\alpha)=k(\alpha^2)$

代数B 1回目

$\boxed{4}$ (1). $\left(\frac{T-1}{2}\right)^2 = 2.$ $\to$ $T^2-2T+1 = 8$

T^2-2T-7 の根元 $\to$ 既約多項式により これが $F_\alpha(T)$

(2). $(T-2)^3 = 3$ $\rightsquigarrow$ $T^3 - 3\cdot 2T^2 + 3\cdot 2^2\cdot T - 8 = 3$

$\to$ $\underbrace{T^3 - 6T^2 + 12T - 11}_{g(T)}$ の根元

$g(T)$の有理根は 11の約数. $g(1) \neq 0$, $g(11) = 11\cdot(11-6) + 11\cdot(12-1)$

$= 16\cdot 11 \neq 0$

$g(-1) \neq 0$ $g(-11) < 0$ $\to$ 既約多項式により これ.

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}+i} = \frac{\sqrt{2}-i}{2+1} = \frac{1}{3}(\sqrt{2}-i)$ $\rightsquigarrow$ $3T + \frac{1}{T} = 2\sqrt{2}.$

$\left(3T+\frac{1}{T}\right)^2 = 4\cdot 2.$

$9T^2 + 6 + \frac{1}{T^2} = 8$ $\to$ $9T^4 + 6T^2 + 1 = 8T^2$

$\to$ $9T^4 - 2T^2 + 1 = 0$ の根元

$f(T)$ $\to$ $9T^4 - 2T^2 = -1$ $\rightsquigarrow$ $T \mid 1$

$f(1) = 8$. $f(-1) = 8$. $\to$ 既約多項式 $F_\alpha(T) = T^4 - \frac{2}{9}T^2 + \frac{1}{9}$

$\boxed{5}$ (1) $\sqrt[9]{9} = 9^{\frac{1}{9}} = 3^{\frac{2}{9}} = (3^{\frac{1}{9}})^2 \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$

一方, $3^{\frac{1}{9}} = (3^{\frac{2}{9}})^5 \cdot \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$ より $\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$

(2). (1)より, $\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) = \mathbb{Q}(\sqrt[9]{3})$.

最小多項式は T^9-3 $\leftarrow$ (アイゼンシュタインより既約) $\to$ $[\mathbb{Q}(\sqrt[9]{3}) : \mathbb{Q}] = 9$

さて. $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$ なら $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$

今. $[\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\sqrt[9]{9}) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})] \cdot [\mathbb{Q}(\sqrt{3}) : \mathbb{Q}]$

なので $\mathbb{Q}(\sqrt{3})/\mathbb{Q}$は 2次拡大より $2 \mid 9$ でないといけないがこれは矛盾

$\therefore$ $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt[9]{9})$